PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

si $1 \le i \le n-1$: $a_{i,i+1} = i$;

si $2 \le i \le n$: $a_{i,i-1} = n+1-i$;

si $j \ne i-1$ et $j \ne i+1$: $a_{i,j} = 0$.

Ainsi : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & . & & & . \\ 0 & n-2 & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . & 0 \\ . & & & . & . & . & n-1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *On suppose, dans cette question seulement,* $n = 3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer les valeurs propres de A_3.

   b. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?

   c. La matrice A_3 est-elle inversible ?

2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.

   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E :

   $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$.

   On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A_n.

   a. Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \le j \le n-2$, $u(X^j)$.

   b. Démontrer que, pour tout élément $P(X)$ de E :

   $u(P(X)) = (n-1)\,X\,P(X) - (X^2-1)\,P'(X)$

   (où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$).

3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u, et on considère un vecteur propre $P(X)$ associé à cette valeur propre.

   a. On suppose : $\lambda \ne n-1$. Montrer que 1 est racine de $P(X)$.

   b. On suppose : $\lambda \ne 1-n$. Montrer que -1 est racine de $P(X)$.

   c. On suppose : $\lambda = n-1$.

   Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et un entier naturel non nul s tels que :

   $P(X) = (X+1)^s\,T(X)$ et $T(-1) \ne 0$.

   Montrer que : $s = n-1$.

   Montrer que $T(X)$ est un polynôme constant et non nul.

d. On suppose : $\lambda = 1 - n$.

Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :

$P(X) = a(X-1)^{n-1}$.

e. On suppose : $\lambda \neq 1-n$ et $\lambda \neq n-1$.

Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que :

$P(X) = (X-1)^r (X+1)^s T(X)$ et $T(-1) \neq 0$ et $T(1) \neq 0$.

Montrer que : $1 \leq r \leq n-2$,

$s = n-1-r$,

$\lambda = n-1-2r$.

Montrer que $T(X)$ est constant et non nul.

4. a. Pour tout entier naturel r tel que $0 \leq r \leq n-1$, calculer $u[(X-1)^r (X+1)^{n-1-r}]$.

b. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

Démontrer que $\mathscr{C} = \left((X-1)^r (X+1)^{n-1-r}\right)_{0 \leq r \leq n-1}$ est une base de E .

5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLÈME 2

Le but du problème est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et , pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} .$$

On note $r :]-1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}} .$$

1. Étude globale de F sur $\mathbb{R}^*$

a. Montrer : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

b. En utilisant le changement de variable $y = -t$, étudier la parité de F .

c. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0 ; +\infty[$ et que :

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x F'(x) = -F(x) + r(x^4)$.

d. Montrer : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $r(x^4) \leq F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Étude locale de F en 0

a. Montrer que F est continue en 0 .

b. α. Établir :

$$\forall u \in [0 ; +\infty[, \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{1}{2}u\right) \leq \frac{3}{8}u^2 .$$

β. En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 , et déterminer celui-ci.

γ. Montrer que F est dérivable en 0 , et calculer $F'(0)$.

c. Établir que F' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 , et déterminer celui-ci.

d. Établir que F est de classe C^1 sur IR .

3. Étude locale de F en $+\infty$

a. α. On note $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \in]0 ; +\infty[$.

β. En déduire : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x F(x) + \frac{1}{x} F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1)$.

b. α. En déduire : $F(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

β. Montrer : $F'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Tracer la courbe représentative de F (on n'étudiera ni la concavité, ni les points d'inflexion, et on admettra que $F(1)$ admet 0,93 comme valeur approchée à 10^{-2} près).